

Geometria

$\mathbb{IK}$

Geometria Affine

$\mathbb{R}$

Geometria Euclidea

distanze euclidea.

Geometria Amplica (proiettiva)

Complessificazione.

• Geometria Affine $\rightarrow$ Traslati di sp. vettoriali.

$$X \mapsto AX + B$$

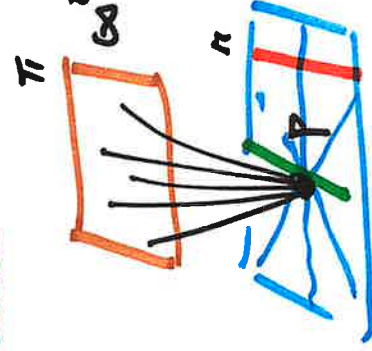
rette per $P =$

rette per P ed un punto di π

$$\pi: \mathbb{C}^2 + \mathbb{C}^2 + 1$$

rette per P ed un punto di π

rette per $P // a$



$$(x^2-1)^2 + (y^3-1)^4 = 0$$

• (1,1)

Non c'è un $\mathbb{R}$ unico e diverso

DATA $f(x, y) = 0 \rightarrow$ Troviamo $\mathcal{U}(f) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0 \}.$

! "impossible" univocamente trovare f.

→ Questo problema non si pone e lavoriamo in $\mathbb{C}!!$

Teorema: Sia C una curva algebrica in $P^2(\mathbb{C}) = P^2(\mathbb{C})$.
Sappiamo che $C = V(f)$. Allora $\deg f = \# \text{ punti in } C$ comune fra C ed una qualsiasi retta di $P^2(\mathbb{C})$.

Inoltre f è un polinomio in x, y che deriva da una serie di potenze.

Geometria affine $\rightarrow$ deve soddisfare gli
 assiomi di Euclide
 (tranne quelli metrici)



La costruzione e l'assione di "Parallelismo"

- $n=2$
- 1) per 2 punti $\exists!$ retta
 - 2) esistono almeno 3 punti non allineati
 - 3) per un punto P ed una retta r , $\exists!$ retta per P non incidente ad r e tale retta è parallela ad r



Def: Si dice geometria affine di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$

$AG_n(\mathbb{K})$ una struttura $(A, f, V_n(\mathbb{K}))$ ove

A è un insieme non vuoto $\rightarrow$ PUNTI

$f: A \times A \rightarrow V_n(\mathbb{K})$ tale che:

$$1) \forall P \in A, \forall \vec{v} \in V_n(\mathbb{K}) \exists! Q \in A: f(P, Q) = \vec{v} \rightarrow Q = P + \vec{v}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$$

$$2) \forall P, Q, R \in A: \vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}.$$

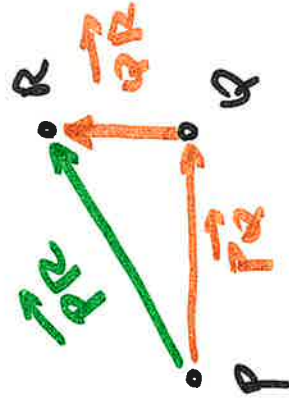
$$f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R).$$

Il punto Q tale che $f(P, Q) = \bar{v}$ è detto traslato di

P secondo il vettore $\bar{v} \Rightarrow 1)$ dice che per ogni punto $P \in A$ e per ogni $\bar{v} \in V$ $\exists!$ traslato Q di P secondo $\bar{v}$.

$$Q = P + \bar{v}$$

$$Q = P + \vec{PQ}$$



1)

~~Q~~

proposizione:

- 1) $\vec{PP} = \vec{0}$
- 2) $\vec{PX} = \vec{0} \iff X = P$
- 3) $P + \vec{v} = P + \vec{w} \iff \vec{v} = \vec{w}$
- 3') $\vec{PQ} = -\vec{QP}$
- 4) esiste una biiezione fra gli elementi di A e quelli di $V_n(1k)$.
- 5) Le traslazioni sono un gruppo.

DIM

1) $\vec{PP} = \vec{PP} + \vec{PP} \Rightarrow$ sottraendo $\vec{PP}$ e $\vec{PP}$ si ottiene $(-\vec{PP}) + \vec{PP} = \vec{0} = (\vec{PP}) + (-\vec{PP}) = \vec{PP}$

2) $\forall P \in A, \forall \vec{v} \in V_n(1k) \exists ! Q = P + \vec{v}$ ma $P = P + \vec{0} \Rightarrow \vec{PX} = \vec{0} \Rightarrow X = P$

il viceversa è 4

3) Supponiamo $Q = P + \vec{v} = P + \vec{w} \Rightarrow \vec{PQ} = P + \vec{v}$
 $\Rightarrow P + \vec{PQ} = P + \vec{w}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow P + (\bar{v} - \bar{w}) &= (P + \bar{v}) + (-\bar{w}) = \\ &= Q + (-\bar{w}) = P \Rightarrow \bar{v} - \bar{w} = 0\end{aligned}$$

$$3') \quad \vec{PQ} + \vec{QP} = \vec{PP} = 0 \Rightarrow \vec{QP} = -\vec{PQ}$$



4) Sia P un punto fisso di $AG_n(K)$, e sia

$$\Phi_P: A \rightarrow V_n(K)$$

$$\{X \rightarrow \vec{PX}.$$

a) Φ_P è suriettiva, infatti per ipotesi $\forall \vec{v} \in V_n(K)$

$$\exists Q \in A: \vec{PQ} = \vec{v} \Rightarrow \Phi_P(Q) = \vec{v}.$$

b) Φ_P è iniettiva. Sia $\Phi_P(Q) = \Phi_P(R) \Rightarrow \vec{PQ} = \vec{PR} = \vec{v}$
 $\Rightarrow f(P, Q) = f(P, R) = \vec{v} \Rightarrow R = Q.$

5) Sia $\mathcal{U} := \{f_v: A \rightarrow A : f_v(x) = x + \bar{v}\}$

Allora $\mathcal{U}$ è un gruppo

$$f_{\bar{v}}(x) = x + \bar{v} \quad \forall x \Rightarrow f_{\bar{v}} = \text{id}.$$

$$\left[f_{\bar{v}} \circ f_{\bar{w}}(x) = (x + \bar{w}) + \bar{v} = \right. \\ \left. = x + (\bar{w} + \bar{v}) = \right. \\ \left. = f_{\bar{v} + \bar{w}} \right]$$

$\Rightarrow$ in particolare

$$f_{\bar{v}} \circ f_{-\bar{v}} = f_{\bar{0}}$$

$$f_{\bar{v}} \circ (f_{\bar{w}} \circ f_{-\bar{w}}) = f_{\bar{v} + (\bar{w} + \bar{w})} = \\ = f_{(\bar{v} + \bar{w}) + \bar{w}} =$$

$$= (f_v \circ f_{\bar{w}}) \circ f_{-\bar{w}}. \quad \square$$

$\mathcal{U}$ in particolare è isomorfo a $(V, +)$.

$$f_{\bar{v}} \circ f_{\bar{w}}(x) = (x + \bar{w}) + \bar{v} =$$

$$= (x + \bar{w}) + \bar{v} =$$

$$= y + \bar{w} = \bar{z}$$

$$\bar{w} = \bar{y} \quad \bar{w} = \bar{y}$$

$$\bar{w} = \bar{y} \quad \bar{w} = \bar{y}$$

$$\bar{w} = \bar{y} \quad \bar{w} = \bar{y} \quad \bar{w} = \bar{y}$$

$$x \bar{w}$$

COORDINAZIONE.

1) Sia $AG_n(\mathbb{K}) = (A, f, V_n(\mathbb{K}))$ una geometria affine.

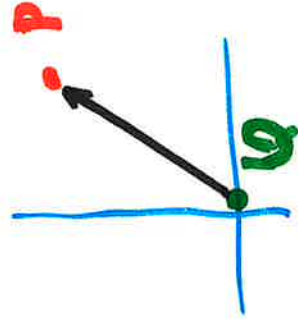
si dice riferimento affine $\Pi = (O, B)$ una coppia

ove $O \in A$ (detto origine) e B è una base di $V_n(\mathbb{K})$.

1) la coordinatizzazione di $AG_n(\mathbb{K})$ è una funzione
non invertibile Π

$$\psi_{\Pi} : \begin{cases} A \rightarrow \mathbb{K}^n \\ P \rightarrow (p_1 \dots p_n) \end{cases} \quad \text{ove} \quad \vec{OP} = p_1 \vec{e}_1 + \dots + p_n \vec{e}_n$$

$$B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n).$$



coord. di P = componenti di $\vec{OP}$ rispetto
a B .

ψ_P è una trasformazione $A \rightarrow k^n$

$$\text{III} \quad \psi_P(X) = \psi_P(\tilde{X}) \Rightarrow \vec{OX} = \vec{O\tilde{X}} \text{ in questo}$$

hanno la stessa comp. rispetto a B

$$\Rightarrow X = \tilde{X}.$$

$$[\vec{OX} - \vec{O\tilde{X}}] = \vec{0} \Rightarrow \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \vec{OX} & + & \vec{O\tilde{X}} = \vec{0} \\ \Rightarrow \vec{OX} = \vec{0} & \Rightarrow \vec{X} = \tilde{X} \end{matrix}$$

$$\forall \vec{u} (p_1 \dots p_n) \in k^n \exists! \vec{v} = p_1 \vec{e}_1 + \dots + p_n \vec{e}_n \in V_n(k)$$

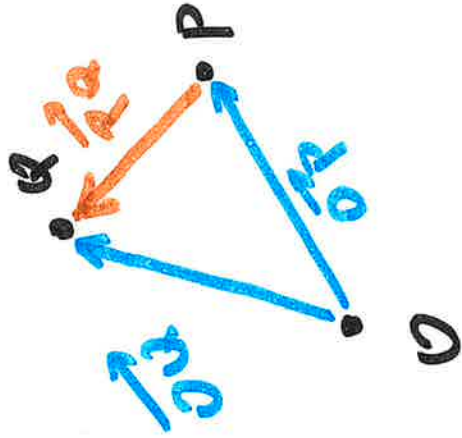
$$\Rightarrow \exists! P: P = O + \vec{v}.$$

Oss: Siano P tale che $\Phi_P(P) = (p_1 \dots p_n) \Rightarrow$

Q tale che $\Phi_P(Q) = (q_1 \dots q_n)$

$\Rightarrow$ il vettore $\vec{PQ}$ che è $(q_1 - p_1)\vec{e}_1 + \dots + (q_n - p_n)\vec{e}_n$

cioè ha comp. $\Phi_P(Q) - \Phi_P(P)$ rispetto a B .



$$\begin{aligned}\vec{PQ} &= \vec{PO} + \vec{OQ} = \\ &= \vec{OQ} - \vec{OP}\end{aligned}$$

↓
in componenti

$$\Phi_P(Q) - \Phi_P(P).$$

⚠ $\Phi_P(P)$ = coordinate di P

$\Phi_P(Q) - \Phi_P(P)$ = componenti di $\vec{PQ}$

Sia P tale che $\Phi_P(P) = (P_1 \dots P_n)$

oss:

$$e \vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + \dots + v_n \vec{e}_n \Rightarrow \Phi_P(P + \vec{v}) =$$

$$= (P_1 + v_1 \dots P_n + v_n) = \Phi_P^1(v)$$

$$\Phi_P(Q) - \Phi_P(P) = (v_1 \dots v_n).$$

fissato un riferimento affine in $AG_n(K) = (A, \mathcal{F}, V_n(K))$
 possiamo identificare a meno di isomorfismo la nostra
 geometria con (K^n, g, K^n)

ove i punti sono elementi di K^n
 i vettori sono elementi di K^n

e $g(P, Q) = Q - P$ (come el. di K^n).

$$\begin{aligned}
 (P, \bar{v}) &\rightarrow P + \bar{v} & Q &= P + (Q - P) \\
 g(P, Q) &= \vec{PQ} = Q - P
 \end{aligned}$$

⚠ la nozione di 2 punti non è definita!
 $Q - P$ è un vettore, non un punto.

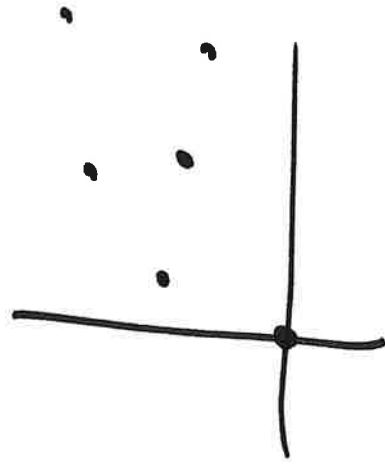
$P + \vec{v}$
 punto
 vettore!

$(Q - P)$
 vettore!

$$\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$$

$$(Q - P) + (R - Q) = (R - P)$$

$$R = P + \vec{PR} = P + (\vec{PQ} + \vec{QR}) = P + (-P + Q - Q + R) = P + (-P + R) = R.$$



$n=2$
 $k=\mathbb{R}$

Def: Sia $AG_n(K)$ una geometria affine in cui è dato un r.f. affine Π . Si dice curva algebrica di grado n descritta dal polinomio $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ l'insieme di tutti i punti di $AG_n(K)$ che soddisfanno l'equazione $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

ordinate rispetto a P soddisfano l'equazione
 $f(x_2 \dots x_n) = 0$ con $\deg f = n \geq 1$

Per convenire si scrive come $V_P(f)$.

$$V_P(f) := \{ P \in A : f(\psi_P(P)) = 0 \}.$$

$n=2 \Rightarrow$ curve algebriche.

$$n=2 \quad A_{G_2}(1k)$$

$$n=3 \quad A_{G_3}(1k)$$

$$ax + by + c = 0 \quad \omega_2 \quad (a, b) \neq (0, 0)$$

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \omega_2 \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

Piano

ω^2 punti.

spazi affini e sottospazi lineari.

- $(A, f, V_n(K)) = AG_n(K)$ spazio affine.

sottospazio affine.

$$(S, \hat{f}, \mu_n(K)) \text{ ove } S \subseteq A$$

$$\mu_n(K) \subseteq V_n(K)$$

$\hat{f}$ è la restrizione di f ad $S \times S$ fondata ad μ_n che gode delle medesime proprietà.

$$S \subseteq A \quad \hat{f} \subseteq f \quad \mu_n(K) \subseteq V_n(K)$$

$$f \subseteq (A \times A) \times V \Rightarrow \hat{f} \subseteq (S \times S) \times \mu_n \cap f$$

T è un sottospazio lineare di $AG_n(K)$ e

$$T = [P; W] := \{ P + \bar{w} \mid \bar{w} \in W \}.$$

$$P \in A, W \subseteq V_n(K).$$

T = insieme di tutti i traslati di un punto P secondo vettori di un sottospazio vettoriale W di $V_n(K)$.

Teorema: M è un sottospazio affine di $AG_n(K)$

$\Leftrightarrow M$ è un sottospazio lineare.